

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**4/11/2023**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**A2.** Πότε μια ευθεία της μορφής  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ ;

**A3.** Δίνεται ο ακόλουθος ισχυρισμός:

«Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της».

- (α) Να χαρακτηρίσετε την ανωτέρω πρόταση ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).  
(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- (α) Μια πολυωνμική συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.  
(β) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.  
(γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.  
(δ) Για τη συνάρτηση  $f(x) = 2^x$  ισχύει  $f'(x) = x \cdot 2^{x-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $(\alpha, \beta)$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 7+4+(1+3)+10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ .

**B1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f'$ .

**B3.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 2$ .

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{f(x)}$ .

**Μονάδες 7+7+5+6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $x(f(x) - \ln x) = f(x)$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1,1)$  και να βρείτε την εξίσωσή της.

**Γ3.** Έστω ( $\varepsilon$ ):  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο  $M(x,y)$  με  $x > 0$  κινείται κατά μήκος της ευθείας ( $\varepsilon$ ) και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Έστω επίσης  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $OMK$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων και  $K$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(1,1)$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x-1$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(2,3)$ . Δίνεται ότι  $e^4 > 27$ .

**Μονάδες 5+7+6+7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί  $f(x) \geq 0$  και  $f(x) \neq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Δ2.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ .

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε επιπλέον ότι  $f^2(x) = 2xf(x) + 3$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$ ,  $x \geq 0$  (μονάδες 3) και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  (μονάδες 5).

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x) = f(x) - x$  και  $h(x) = \frac{2}{x}$ ,  $x > 0$ , έχουν μοναδικό κοινό σημείο  $M$  και επιπλέον ότι στο  $M$  έχουν κάθετες εφαπτομένες.

**Μονάδες 6+5+8+6**