1.✉Ζωγράφου:Ι.Χρυσίππου1,☎210 7488030 &ΙΙ.Ξηρογιάννη 10 ,☎210 7488180
2.✉Χολαργός:Φανερωμένης13,☎210 6536551
3.✉ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση9,πλατείαΑγ.Παρασκευής,☎2106000031

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

2/11/2024

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f.

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$, ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

δ) Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [0,3]$ με $f(0) = 2$ και $f(3) = -1$,τότε υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ε) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f δεν μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f.

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$, $x \in R$.

Β1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β3. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x) = \sqrt{3}$.

Β4. Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0).

Μονάδες : 8 – 5 – 5 – 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + \alpha x + \beta \ , & x < 0 \\ x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x + 1 \ , & x \geq 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει :

- Η ευθεία (ε) : y = x + 1 πλάγια ασύμπτωτης της Cf στο - ∞

Γ1. Να δείξετε ότι α = β = 1

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ(0,f(0)) σχηματίζει με τον x′x γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $N(x_0,f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία (ζ) : $y = -\frac{1}{2} \cdot x$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση g : (0,π] → R για την οποία ισχύει :

$$g(x) = |2f(x) - 2x^2 - 2x - 1| \ , 0 < x \leq \pi$$

Να γράψετε τον τύπο της g(x) χωρίς απολυτό. Μονάδες : 7 – 6 – 5 – 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f : (0,+∞) → R για την οποία ισχύει :

- $f(\kappa \cdot x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, $\kappa > 0$
- $f(1) = e - 1$

Δ1. Να δείξετε ότι κ = 1.

Με δεδομένο ότι $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

Δ2. α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντιστροφή συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια ακριβώς ρίζα x_0 ,η οποία βρίσκεται στο διάστημα (0,1).

Δ3. Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο R και x_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 που αναφέρεται στο ερώτημα **Δ2(β)** ,να αποδείξετε ότι :

$$(f^{-1})'(0) = \frac{{x_0}^2}{x_0 + 1}$$

Δ4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g : R \to R^*$ με $g(1) = f(3 - 2x_0)$.

α) Να αποδείξετε ότι g(x) > 0 για κάθε x∈R.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈[1,2] τέτοιο ώστε : $(g(\xi))^{f(\xi)} = \left(\sqrt{g(1) \cdot g(2)}\right)^{f(\xi)}$

Μονάδες : 5 – 7(4-3) – 5 – 8(3-5)