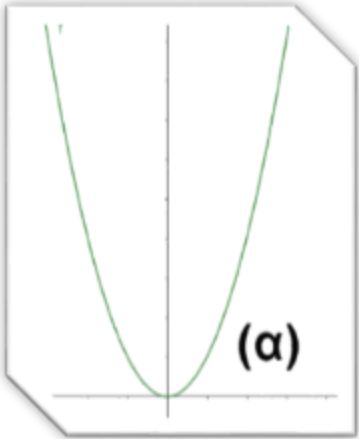
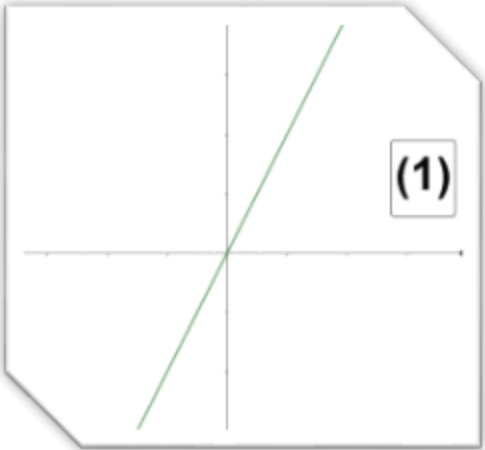
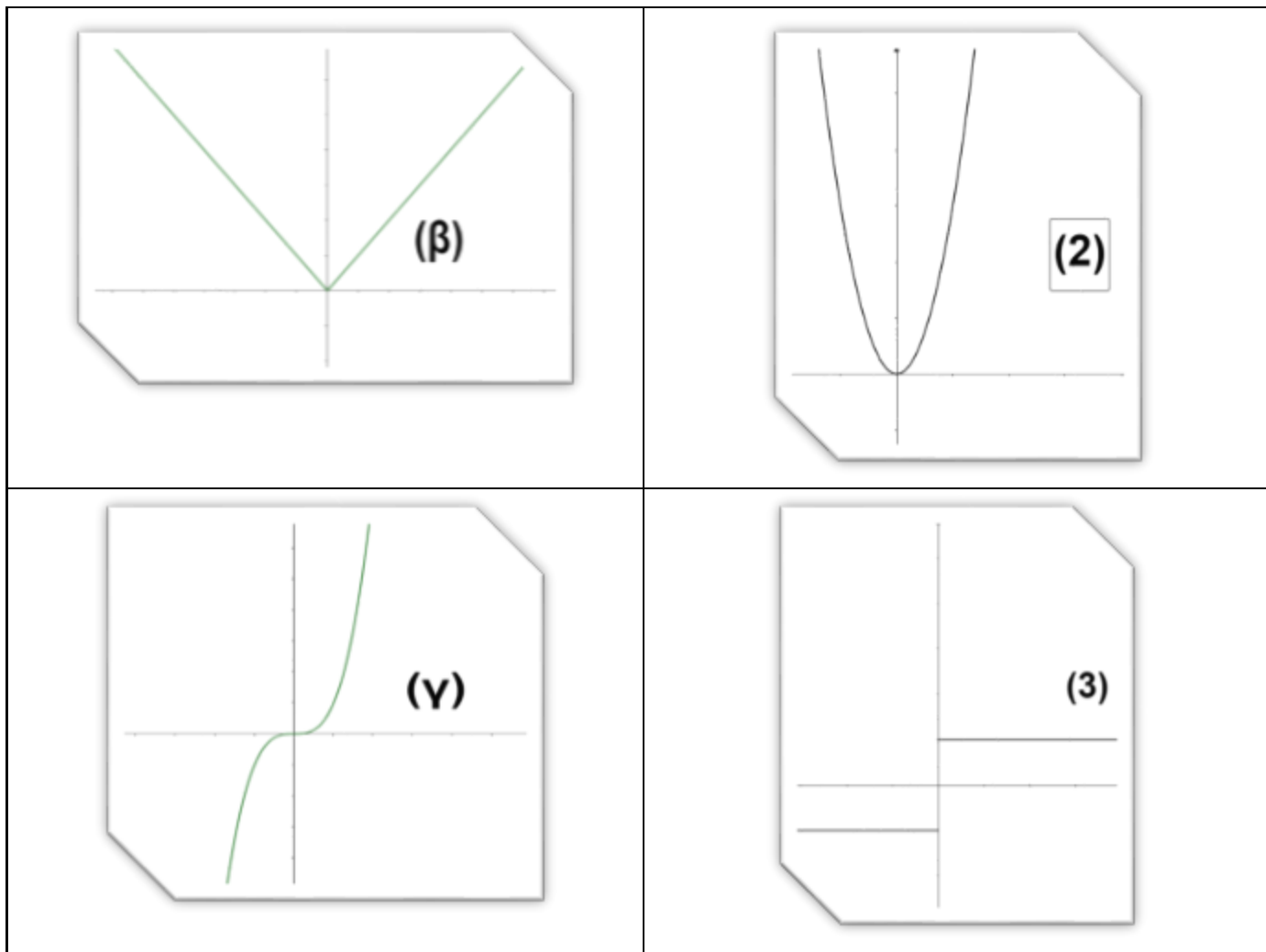


**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 21 Σεπτεμβρίου 2024**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A)** Αν μία πραγματική συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο σύνολο  $A$  να γράψετε τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της  $f$ . **(5μ)**
- B)** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **(5μ)**
- Γ)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και να γράψετε τον τύπο της παραγώγου. **(6μ)**
- Δ)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**).
1. Η συνάρτηση  $f(g(x))$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ .
  2. Η εξίσωση  $|ημx| = |x|$  έχει άπειρες ρίζες.
  3. Αν  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$  και η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  δεν παρουσιάζει ρίζα στο  $[\alpha, \beta]$ . **(6μ)**
- Ε)** Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις  $f$  της στήλης Α με τις συναρτήσεις  $f'$  της στήλης Β.

Στήλη Α (Συνάρτηση $f$ )	Στήλη Β (Συνάρτηση $f'$ )
	



**(3μ)**

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$  και  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ .

1. Να εξετάσετε αν  $f' = g'$ .

**(8μ)**

2. Αφού αποδείξετε ότι η  $g$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση να βρείτε την αντίστροφη της.

**(2+6μ)**

3. Αν  $g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ,  $x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$  να αποδείξετε ότι γράφεται στην μορφή  $g^{-1}(x) = 1 + \frac{4}{x-2}$  και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

**(1+3μ)**

4. Αν  $h(g^{-1}(x)) = \ln(4e) - \ln(x-2)$ ,  $x > 2$  τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $h$ .

**(5μ)**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύουν :

- $\eta\mu^2x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2x + x^4, x \in \mathbb{R}$  και  $f$  συνεχής στο 0,
- $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2\alpha, & x \geq 1 \\ \beta \cdot e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}, g$  παραγωγίσιμη συνάρτηση.

1. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$ .

(2+5 μ)

2. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$  και  $\beta = 1$  και στην συνέχεια να υπολογίσετε την  $g'(x)$ .

(3+4 μ)

3. Αφού αποδείξετε ότι η  $g$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση να βρείτε την αντίστροφη της.

(3+4 μ)

4. Αν δίνετε ότι οι συναρτήσεις  $f', g'$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[0,1]$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(x)}{x} + \frac{g'(x)}{x-1} = 0$$
 παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

(4 μ)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύουν :

- $\lim_{h \rightarrow x} \frac{e^h \cdot g(h) - e^x \cdot g(x)}{h-x} = e^x \cdot (g(x) + \ln(e^x + 1) - x), x \in \mathbb{R}$  και  $g(1) = 0$
- $f(x) = (\ln x)^x, x > e$

1. Να υπολογίσετε την  $f'$ , στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(5+3+1 μ)

2. Να αποδειχθεί ότι  $g'(x) = \ln(e^x + 1) - x, x \in \mathbb{R}$  και να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ . Στην συνέχεια να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης  $g$ .

(5+2+1 μ)

3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ g\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right) \cdot e^{x \cdot \ln(\ln x)} \right]$ .

(4 μ)

4. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ :  
 $g(x) \cdot (2x - 1) + x^2 - x = 0$ .

(4 μ)

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΥΧΙΑ...