1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 16/9/2023

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

**Α2.** Ποτέ μια συνάρτηση $f : A \to R$ καλείται 1 -1 ;

**Α3.** Πότε μια συνάρτηση καλείται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

α) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της $f^{-1}$.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h} = 3f'(x_0)$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

ε) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

**Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x}{x-1}$ , $x < 1$ , $\alpha \in R - \{0\}$ και $f'(-1) = -1$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι α = 4.

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και στην συνέχεια να βρείτε την αντιστροφή της.

- Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-4}$ , $x < 4$.

**Β3.** Αν $g(x) = \ln x$ , $x > 0$ ,να βρείτε την σύνθεση της $f^{-1}$με την g.

**Β4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_0) + \sigma\upsilon\nu x_0 = 0$

**Β5.** Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2023}{x}$ .

**Μονάδες 5 – 7 – 4 – 5 – 4**

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1\,, & x<0 \\ 2\sqrt{x}+\alpha x+\beta\,, & x\geq 0\end{cases}$

για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4)}{h}=1$ .

**Γ1.** Να αποδειχθεί ότι $f'(4)=\frac{1}{2}$ , $\alpha=0$ και $\beta=1$.

**Γ2.** Να βρεθεί η $f'(x)$.

**Γ3.** α) Για $x\geq 0$ , να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$.
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x^2+1)+5)=7$ σε όλο το R , οπού $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2$ , $x\geq 1$.

**Γ4.** Να βρείτε έναν ακέραιο κ τέτοιον, ώστε στο διάστημα (κ,κ+1) η εξίσωση $\frac{f(\gamma)}{x-2}+\frac{f^{-1}(\delta)}{x-1}=0$ , με $\gamma<0$ , $\delta>1$ να έχει ακριβώς μια ρίζα .

**Μονάδες 6 – 4 – 9**(4-5) **– 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ για την οποίες ισχύουν :

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-1}{x-\alpha}=2$ , $\alpha\geq 1$
- $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)\ln\alpha-g(\alpha)\ln x}{x-\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}+\ln\alpha$
- $f(x)=\beta\cdot x-\alpha\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ , $\beta\in R$ .
- $f''(x)+f'(x)=2$ για κάθε $x\in R$.

**Δ1.** Να δείξετε ότι $g(\alpha)=1$ και $g'(\alpha)=2$.

**Δ2.** Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

- **Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται $f(x)=2x-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα $x_0$.

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x+f(x^3)=f(x^2)+e^{-x}$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(0,x_0)$, όπου $x_0$ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης του **Δ3** ερωτήματος.

**Μονάδες 3 – 9 – 5 – 8**