Λύσεις διαγωνίσματος Άλγεβρας Α' Λυκείου 9/2/25

ΘΕΜΑ 1

Α) Σχολικό βιβλίο σελ. 90

Β) i) Σ ii) Σ iii) Λ iv) Λ v) Λ vi) Σ

Γ) α) (iii) β) (ii) γ) (iii)

ΘΕΜΑ 2

Α) α) i) $K+\Lambda = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{10}{25-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

ii) $K\cdot\Lambda = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2-\sqrt{5}^2}$

$= \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$

β) Θεωρούμε $S = K+\Lambda = \frac{1}{2}$, $P = K\cdot\Lambda = \frac{1}{20}$

τότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$

Β) α) $3x-1 < x+9 \Leftrightarrow$

$3x - x < 9+1 \Leftrightarrow$

$2x < 10 \Leftrightarrow$

$x < 5$

β) $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

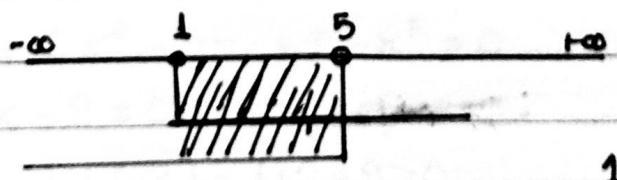
$4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow$

$-x - 2x \leq -4 + 1 \Leftrightarrow$

$-3x \leq -3 \Leftrightarrow$

$x \geq 1$

γ)



$1 \leq x < 5$

$x \in [1, 5)$

Θέμα 3

Α. α) $(x-2)^2 - 4|x-2| - 12 = 0$ $\quad x^2 = |x|^2$

$\Leftrightarrow |x-2|^2 - 4|x-2| - 12 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $|x-2| = \omega > 0$

$(1) \Rightarrow \omega^2 - 4\omega - 12 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0$

$\omega_{1,2} = \dfrac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 6 \\ -2 \text{ απορρ.} \end{cases}$

Άρα $|x-2| = 6 \Leftrightarrow x-2 = 6$ ή $x-2 = -6$

$\Leftrightarrow x = 8$ ή $x = -4$

β) $||2x-1|+3| = 4$

$\Leftrightarrow |2x-1|+3 = 4$ ή $|2x-1|+3 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x-1| = 1$ $\qquad |2x-1| = -7$ ΑΔΥΝΑΤΗ.

$\Leftrightarrow 2x-1 = 1$ ή $2x-1 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2 \quad 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 1} \quad \boxed{x = 0}$

γ) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2x-3}{2-x} + \dfrac{2-x^2}{x^2-2x} = 0 \Leftrightarrow$

$x(x-2)\dfrac{2}{x} + x(x-2)\dfrac{2x-3}{x-2} + x(x-2)\dfrac{2-x^2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$

Ε.Κ.Π : $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0$ και $x \neq 2$

$2(x-2) + x(2x-3) + 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \text{ Απορρ.} \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$

$\boxed{x = -1}$ Δεκτή

Θέμα 3

B. $x^2+2x-8=0$

α) i) $x_1+x_2=-2$ και $x_1\cdot x_2=-8$

ii) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2)^2-2\cdot(-8)$
$=4+16=20$

iii) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{20}{-8}=-\frac{5}{2}$

iv) $3x_1^2x_2+3x_1x_2^2=3x_1x_2(x_1+x_2)=3\cdot(-8)\cdot(-2)=48$

v) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{20-2\cdot(-8)}$
$=\sqrt{20+16}=\sqrt{36}=6$

β) $x^2+2x-8=0$

$S'=4x_1-1+4x_2-1=4x_1+4x_2-2=4(x_1+x_2)-2$
$=4\cdot(-2)-2=-8-2=-10$

$P'=(4x_1-1)(4x_2-1)$
$=16x_1x_2-4x_1-4x_2+1$
$=16x_1x_2-4(x_1+x_2)+1$
$=16\cdot(-8)-4\cdot(-2)+1$
$=-128+8+1$
$=-119$

$x^2+10x-119=0$

Θέμα 4

Α. α) $4x^2+2(\lambda-2)x+1-\lambda=0$ (1)

$\Delta=[2(\lambda-2)]^2-4\cdot4\cdot(1-\lambda)$
$=4(\lambda-2)^2-16+16\lambda=4(\lambda^2-4\lambda+4)-16+16\lambda$
$=4\lambda^2-16\lambda+16-16+16\lambda=4\lambda^2\geq0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Θέμα 4

Α. Β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες άνισες θετικές πρέπει:

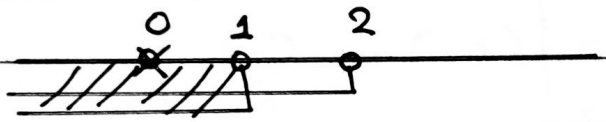
$\Delta > 0$ και $P > 0$ και $S > 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 > 0$ και $\frac{1-\lambda}{4} > 0$ και $-\frac{2(\lambda-2)}{4} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$ $\Leftrightarrow 1-\lambda > 0$ $\frac{\lambda-2}{2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda < 1$ $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow$

$\lambda < 2$



Άρα $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Β. $x^2 - 10x + \lambda + 8 = 0$

$2x_1 = 3x_2$

$S = x_1 + x_2 = 10$

$P = x_1 \cdot x_2 = \lambda + 8$

$2x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow$

$x_1 = \frac{3}{2} x_2$

$x_1 + x_2 = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{2} x_2 + x_2 = 10 \Leftrightarrow 3x_2 + 2x_2 = 20$

$\Leftrightarrow 5x_2 = 20 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 4}$

$x_1 = \frac{3}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 6}$

$x_1 \cdot x_2 = \lambda + 8 \Leftrightarrow 6 \cdot 4 = \lambda + 8 \Leftrightarrow 24 - 8 = \lambda \Leftrightarrow$

$\boxed{\lambda = 16}$

Θέμα 4

Γ. $\lambda x^2 + (2\lambda-1)\cdot x + \lambda - 1 = 0 \quad , \lambda \neq 0$

α) $\Delta = (2\lambda-1)^2 - 4\lambda(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda =$

$= 1 > 0$

Άρα $\Delta = 1$, ανεξάρτητη του λ.

β) $x_{1,2} = \dfrac{-2\lambda+1 \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \dfrac{-2\lambda+1+1}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda+2}{2\lambda} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{-2\lambda+1-1}{2\lambda} = -1 \end{cases}$

γ) $\left| \dfrac{1-\lambda}{\lambda} - (-1) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \dfrac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right| = 2$

$\Leftrightarrow \left| \dfrac{1-\lambda+\lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \dfrac{1}{\lambda} \right| = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = 2 \quad \eta' \quad \dfrac{1}{\lambda} = -2$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} \quad \eta' \quad \lambda = -\dfrac{1}{2}$