ΘΕΜΑ 1ο:

A1) i) Θ ii) $\theta = 10^x$ iii) $x = e^{\theta}$, iv) Ο v) 1

A2)
1 → Σ
2 → Λ
3 → Λ
4 → Λ
5 → Λ

A3)
1 → γ
2 → β
3 → γ
4 → β
5 → α

ΘΕΜΑ 2ο

B1) $\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(2) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + a + \beta - 2a - 5\beta + 3 = 0 \\ 16 + 4a + 4\beta + 4a + 10\beta + 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -a - 4\beta = -1 \\ 8a + 14\beta = -10 \end{cases} \Big| \cdot 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 32\beta = -8 \\ 8a + 14\beta = -28 \end{cases}$

(+) $-18\beta = -36$

$\boxed{\beta = 2}$

Άρα: $-a - 4\beta = -1 \Leftrightarrow -a - 8 = -1 \Leftrightarrow -a = 7 \Leftrightarrow$ $\boxed{a = -7}$

B2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

2	-5	-4	3	-1
///	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

$P(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3)$

Άρα: $P(x)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0$ ή $2x^2-7x+3=0$

$\boxed{x=-1}$

$\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3$

$\Delta=25$

$x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{4}$ ↗ $x_1=\boxed{3}$ ↘ $x_2=\boxed{1/2}$

B3)

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2-4x+3 & x^2-1 \\ \hline -2x^3 \qquad\quad +2x & 2x-5 \\ \hline \quad -5x^2-2x+3 & \\ \quad\ 5x^2 \qquad -5 & \\ \hline \qquad -2x-2 & \end{array}$$

Οπότε:

$P(x)=(x^2-1)(2x-5)-2x-2$

B4)

$\frac{u(x)}{P(x)}\geq 0 \Leftrightarrow$ για $x\neq -1$ κ' $x\neq 3$ κ' $x\neq \frac{1}{2}$

$\frac{-2x-2}{(x+1)(2x^2-7x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-2(x+1)}{(x+1)(2x^2-7x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-2}{2x^2-7x+3}\geq 0 \Leftrightarrow$

$2x^2-7x+3<0$

x	$-\infty$		$1/2$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3$		+	0	−	0	+	

Επομένως: $\boxed{x\in(1/2, 3)}$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1 Για την f: πρέπει: $e^{2x}-2e^{x}-3>0 \Leftrightarrow$
$(e^{x})^2-2e^{x}-3>0$

Θέτουμε: $\omega=e^{x}$ τότε:

$\omega^2-2\omega-3>0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$

$\omega_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}$ → $\omega_1=3$, $\omega_2=-1$

ω	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$\omega^2-2\omega-3$	+	0	−	0	+

$\omega<-1$ ή $\omega>3 \Leftrightarrow$

$e^{x}<-1$ ή $e^{x}>3 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow}$

Αδύνατο $\quad \ln e^{x}>\ln3 \Leftrightarrow$

$x>\ln3$

Οπότε: $\boxed{A_f=(\ln3,+\infty)}$

Για την g: πρέπει: $e^{x}+1>0 \Leftrightarrow e^{x}>-1$
ισχύει για $x\in\mathbb{R}$

Οπότε $\boxed{A_g=\mathbb{R}}$

Γ2 Για $y=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(e^{x}+1)=0 \Leftrightarrow$

$\ln(e^{x}+1)=\ln1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^{x}+1=1 \Leftrightarrow$

$e^{x}=0$ Αδύνατο.

Άρα η C_g δεν τέμνει τον $x'x$

Για $x=0$: $y=g(0)=\ln2$

Άρα η C_g τέμνει τον $y'y$ στο $\boxed{(0,\ln2)}$

Γ3) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\ln(e^{2x} - 2e^x - 3) = \ln(e^x + 1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$e^{2x} - 2e^x - 3 = e^x + 1 \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$

Θέτουμε: $\omega = e^x$ τότε:

$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$\omega_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$ → $\omega_1 = 4$, → $\omega_2 = -1$ απορρίπτεται.

Για $\omega = 4$: $e^x = 4 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \ln e^x = \ln 4 \Leftrightarrow$

$x = \ln 4 > \ln 3$ οπότε

δεκτή καθώς ανήκει και στο A_f και στο A_g

Το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι:

$(\ln 4, \ln 5)$

Γ4) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow$

$\ln(e^{2x} - 2e^x - 3) - \ln(e^x + 1) < 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\dfrac{e^{2x} - 2e^x - 3}{e^x + 1}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\dfrac{e^{2x} - 2e^x - 3}{e^x + 1}\right) < \ln 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{e^{2x} - 2e^x - 3}{e^x + 1} < 1 \overset{e^x + 1 > 0}{\Leftrightarrow}$

$e^{2x} - 2e^x - 3 < e^x + 1 \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 3e^x - 4 < 0 \overset{\omega = e^x}{\Leftrightarrow}$

$\omega^2 - 3e^x - 4 < 0$

ω	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$\omega^2-3\omega-4$	$+$	0	$-$	0	$+$

$-1 < \omega < 4 \Leftrightarrow$

$-1 < e^x < 4 \Leftrightarrow$

$e^x > -1$ και $e^x < 4 \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow}$

ισχύει $\quad \ln e^x < \ln 4 \Leftrightarrow$

$x < \ln 4$

λόγω περιορισμών πρέπει: $x > \ln 3$

Συνεπώς:

$x \in (\ln 3, \ln 4)$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1) Πρέπει: $4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 4^x > 2 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^1 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$2x > 1 \Leftrightarrow x > 1/2$

$A_f = (1/2, +\infty)$

Δ2) $4^{x-1/2} - \frac{4}{5} 2^{x+1} + \frac{6}{5} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{4^x}{4^{1/2}} - \frac{4}{5} 2^x \cdot 2 + \frac{6}{5} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(2^x)^2}{2} - \frac{8}{5} \cdot 2^x + \frac{6}{5} > 0 \overset{\times 10}{\Leftrightarrow}$

$5 \cdot (2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 12 > 0 \Leftrightarrow$

$5 \cdot (2^x)^2 - 16\, 2^x + 12 > 0$

Θέτουμε: $2^x = \omega$ τότε:

$5\omega^2 - 16\omega + 12 > 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 256 - 240 = 16$

$\omega_{1,2} = \frac{16 \pm 4}{10}$ → $\omega_1 = 2$, → $\omega_2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

ω	$-\infty$		$6/5$		2		$+\infty$
$5\omega^2-16\omega+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\omega < \frac{6}{5} \iff$ ή $\omega > 2 \iff$

$2^x < \frac{6}{5} \overset{\log_2 x \nearrow}{\iff}$ ή $2^x > 2^1 \overset{\nearrow}{\iff}$

$\log_2 2^x < \log_2 \frac{6}{5} \iff$ ή $x > 1$

$x < \log_2 \frac{6}{5}$

οπότε: $x \in \left(-\infty, \log_2 \frac{6}{5}\right) \cup (1, +\infty)$

Δ3 $\eta\mu 2x = \frac{f(1)}{e^{\ln 2} \cdot \ln 2} \iff$, $x \in [0, 2\pi]$

$\eta\mu 2x = \frac{\ln 2}{2 \cdot \ln 2} \iff \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \iff$

$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \iff$

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}$:

$0 \le \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \le 2\pi \iff -\frac{\pi}{12} \le \kappa\pi \le 2\pi - \frac{\pi}{12} \iff$

$-\frac{\pi}{12} \le \kappa\pi \le \frac{23\pi}{12} \iff -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{23}{12}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

άρα $\kappa = 0$ κ' $\kappa = 1$

Για $\kappa = 0$: $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{12}}$

Για $\kappa = 1$: $\boxed{x_2 = \frac{13\pi}{12}}$

Για $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$:

$0 \le k\pi + \frac{5\pi}{12} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} \le k\pi \le 2\pi - \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow$

$-\frac{5\pi}{12} \le k\pi \le \frac{19\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le k \le \frac{19}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$

αρα $k=0$ και $k=1$

Για $k=0$: $x_3 = \frac{5\pi}{12}$

Για $k=1$: $x_4 = \frac{17\pi}{12}$

Δ4) $f(2x) - f(x) > f(1) \Leftrightarrow$, για $x \in (1/2, +\infty)$

$\ln(4^{2x} - 2) - \ln(4^{x} - 2) > \ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{4^{2x}-2}{4^{x}-2}\right) > \ln 2 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\frac{4^{2x}-2}{4^{x}-2} > 2 \xLeftrightarrow[4^x-2>0]{x>1/2}$

$4^{2x} - 2 > 2(4^{x} - 2) \Leftrightarrow 4^{2x} - 2 > 2 \cdot 4^{x} - 4 \Leftrightarrow$

$4^{2x} - 2 \cdot 4^{x} + 2 > 0 \Leftrightarrow (4^{x})^2 - 2 \cdot 4^{x} + 1 + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$(4^{x} - 1)^2 + 1 > 0$ ισχύει.