ΛΥΣΗΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1/2/2025

ΘΕΜΑ Α

A4 α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 $f'(x)=e^x(x^2-2x+1)+e^x(2x-2)=e^x(x^2-\cancel{2x}+1+\cancel{2x}-2)$

$=e^x(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Τ.Μ $= 4/e$	↘	Τ.Ε $= 0$	↗

$T.M = f(-1) = e^{-1}(-1-1)^2 = \frac{4}{e}$

$T.E. = f(1) = e(1-1) = 0$

B2 $I=\int_0^1 e^x(x^2-2x+1)\,dx = \left[e^x(x^2-2x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(2x-2)\,dx$

$= e(1-2+1)-1-\left[e^x(2x-2)\right]_0^1+\int_0^1 e^x\cdot 2\,dx =$

$= -1-(0+2)+2\left[e^x\right]_0^1 = -1-2+2(e-1) = -3+2e-2 = \boxed{2e-5}$

B3 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}, & x<0\\ e^x(x-1)^2-1, & x\geq 0\end{cases}$

α)

• $g(0)=1-1=0=\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{1}=0$

Άρα g συνεχής στο $x_0=0$. Η $g(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{x}$ συνεχής στο $[-\pi,0)$ ως σύνθεση κ' πράξεις συνεχών. Τελικά g συνεχής στο $[-\pi,0]$

• g παρ/μη στο $(-\pi,0)$ ως σύνθεση κ' πράξεις παρ/μων.

• $g(-\pi)=\frac{(\eta\mu(-\pi))^2}{-\pi}=\frac{(-\eta\mu\pi)^2}{-\pi}=0=g(0)$ οπότε από Θ. Rolle $\exists\, \xi\in(-\pi,0):\ g'(\xi)=0$.

β) $g'(x)=\frac{2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot x-\eta\mu^2 x}{x^2}$, $x<0$

Από **B3** (α) έχουμε: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu\xi\cdot\sigma\upsilon\nu\xi\cdot\xi-\eta\mu^2\xi}{\xi^2}=0$

$\Leftrightarrow \eta\mu\xi(2\xi\sigma\upsilon\nu\xi-\eta\mu\xi)=0 \underset{\substack{\eta\mu\xi\neq 0\\ \xi\in(-\pi,0)}}{\Longleftrightarrow} 2\xi\,\sigma\upsilon\nu\xi=\eta\mu\xi$.

(1)

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{Γ1}$ (α) $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=0-0+1=1=f(0)$ άρα f ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $x_0=0$

(β) Για $x>0$: $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	
	ΤΜ		ΟΕ		

Τ.Μ $=f(0)=1$

Ο.Ε $=f(1)=0$ άρα $f(x)\geq f(1)$ $\forall x\in[0,+\infty)$

ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x=1$

$\boxed{Γ2}$ • $g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\ln x=x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ από $\boxed{Γ1}$ (β) ΕΧΟΥΜΕ ΟΤΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ $\boxed{x=1}$

• $g'(x)=\ln x+1$, $g'(1)=1$

$h'(x)=1$, $h'(1)=1$

$\Big\} \ g'(1)=h'(1)=1$

$\boxed{Γ3}$ $x^x=e^{x+1}\Leftrightarrow \ln x^x=\ln e^{x+1}\Leftrightarrow x\ln x=x+1$

$\Leftrightarrow x\ln x-x=1\Leftrightarrow x\ln x-x+1=2\Leftrightarrow f(x)=2$

• f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' ↘ ΣΤΟ $Δ_1=[0,1]\rightarrow f(Δ_1)=[0,1]$

f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' ↗ ΣΤΟ $Δ_2=[1,+\infty)\rightarrow f(Δ_2)=[0,\lim_{x\to+\infty}f(x))\overset{*}{=}[0,+\infty)$

$^*\lim_{x\to+\infty}(x\ln x-x+1)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty(+\infty-1+0)=+\infty$

• $2\notin f(Δ_1)$, $2\in f(Δ_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=2$ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ ΣΤΟ $(1,+\infty)$ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΑΦΟΥ f ↗ ΣΤΟ $Δ_2$. ΔΗΛ. ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ $x_0>1$ ΤΕΤΟΙΟ ΩΣΤΕ $f(x_0)=2\Leftrightarrow x_0\ln x_0-x_0+1=2$

$\boxed{Γ4}$ ΘΕΩΡΟΥΜΕ $K(x) = f'(x)(x-1) - 2 \;,\; x \in [1, x_0]$

▸ $K(1) = f'(1)(1-1) - 2 = -2 < 0$

$K(x_0) = f'(x_0)(x_0 - 1) - 2 = \ln x_0 (x_0 - 1) - 2$

$= x_0 \ln x_0 - \ln x_0 - 2$

$\overset{*}{=} x_0 - 1 - \ln x_0 \overset{**}{>} 0$

$* \; f(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 - x_0 + 1 = 2$

$\boxed{x_0 \ln x_0 - 2 = x_0 - 1}$

$**$ ΑΠΟ ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΩΣΗ: $\ln x \leq x - 1 \xrightarrow{x_0 > 1} \ln x_0 < x_0 - 1$

$\Leftrightarrow \boxed{0 < x_0 - 1 - \ln x_0}$

$K(1)K(x_0) < 0$ ΑΠΟ Θ. Bolzano $\exists$ ΤΟΥΛ. ΕΝΑ $\xi \in (1, x_0)$:

$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(x_0 - 1) = 2$

▸ $K'(x) = f''(x)(x-1) + f'(x)$

$= \frac{1}{x}(x-1) + \ln x > 0$ ΑΡΑ $K \uparrow$ ΣΤΟ $(1, x_0)$

$*** \; x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$

ΤΕΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ $\xi \in (1, x_0)$ Τ.Ω.:

$f'(\xi)(x_0 - 1) = 2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 (α) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

x	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ΟΕ = 1

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΟ $f(0) = 1$

(β) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1) - \ln(x+1) \right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) \overset{*}{=} +\infty\,(1-0) = +\infty$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

▸ f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' $\searrow$ ΣΤΟ $(-1,0] = \Delta_1 \to f(\Delta_1) = [1,+\infty)$

f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' $\nearrow$ ΣΤΟ $[0,+\infty) = \Delta_2 \to f(\Delta_2) = [1,+\infty)$

$2025 \in f(\Delta_1)$, $2025 \in f(\Delta_2)$ αρα η εξισωση $f(x) = 2025$

ΕΧΕΙ 2 ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΕΣ x_1, x_2 ΜΕ $x_1 \in (-1,0)$ κ' $x_2 \in (0,+\infty)$

ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ f ΓΝ. ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΤΑ Δ_1, Δ_2 ΕΙΝΑΙ ΑΚΡΙΒΩΣ 2

Δ2 (α) $g'(x) = f'(x+1) - f'(x)$

▸ $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ αρα $f'\nearrow$ ΣΤΟ $(-1,+\infty)$

• $x < x+1 \underset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

αρα $g \nearrow$ ΣΤΟ $(-1,+\infty)$

(β) $f(4x^2+1) - f(4x^2) \le f(x^4+1) - f(x^4)$, $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow g(4x^2) \le g(x^4) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} 4x^2 \le x^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-4) \geq 0$

x		-2		0		2	
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
ΓΙΝ.	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

αρα $\boxed{x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) \cup \{0\}}$

$\boxed{\Delta 3}$ ΘΕΩΡΩ $K(x) = x f(x)$, $x \geq 0$

K ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $[0,x]$ ΑΠΟ ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (0,x)$:

$$K'(\xi) = \frac{K(x) - K(0)}{x} \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = \frac{x f(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = f(x) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{\xi}$$

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ</u> (ΜΕ Rolle ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ)

$$\xi \leftrightarrow t : \quad f'(t) = \frac{f(x) - f(t)}{t} \Leftrightarrow$$

$$t f'(t) = f(x) - f(t) \Leftrightarrow t f'(t) + f(t) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t f(t) - t f(x) \right)' = 0$$

ΘΕΩΡΩ $K(t) = t f(t) - t f(x)$, $t \geq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} K(0) = 0 \\ K(x) = 0 \end{array} \right\} > K(0) = K(x) = 0$ ΑΠΟ Θ. Rolle ΣΤΟ $[0,x]$ ...

$\boxed{\Delta 4}$ ΘΕΩΡΩ ΤΗΝ $\Lambda(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} - 2$, $x > 3$

- $\Lambda'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} > 0$ ΑΡΑ $\Lambda \uparrow$ ΣΤΟ $(3, +\infty)$

Λ ΣΥΝΕΧΗΣ Κ' $\uparrow$ ΣΤΟ $(3,+\infty) \rightarrow \Lambda\left((3,+\infty)\right) \overset{*}{=} (-1, +\infty)$

- ΑΠΟ $\boxed{\Delta 1}$(Β) ΕΧΟΥΜΕ $f(x_1) = f(x_2) = 2025$ ΜΕ $-1 < x_1 < 0 < x_2$
- $x_1 \in \Lambda(A)$, $x_2 \in \Lambda(A)$ ΑΡΑ $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in (3, +\infty)$ ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(\xi_1) = x_1 \Leftrightarrow f(\Lambda(\xi_1)) = f(x_1) = 2025 \\ \Lambda(\xi_2) = x_2 \Leftrightarrow f(\Lambda(\xi_2)) = f(x_2) = 2025 \end{array} \right.$$

ΤΕΛΙΚΑ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(\Lambda(x)) = 2025$ ΕΧΕΙ 2 ΤΟΥΛ. ΡΙΖΕΣ

ΣΤΟ $(3, +\infty)$