

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

A1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$

$$\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \dots \quad \log_{\theta} x = \theta \Leftrightarrow \theta = \dots \quad \ln x = \theta \Leftrightarrow x = \dots \quad \log_{\alpha} 1 = \dots \quad \log_{\alpha} \alpha = \dots \quad (\text{Μον. 5})$$

A2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$.
2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
3. Η f έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
4. Ισχύει $f(2^{2023}) > f(2^{2024})$
5. Το σημείο $A(0, 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . **(Μον. 10)**

A3. Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση δίπλα στον αριθμό κάθε ερώτησης.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$ με $\alpha > 1$ είναι:

- α. γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} β. σταθερή στο \mathbb{R} γ. γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}
δ. κανένα από τα προηγούμενα

2. Αν $x > 0$ και ισχύει $\ln \sqrt{x} = 3$ τότε:

- α. έχει λύση το $x = e^4$ β. έχει λύση το $x = e^6$ γ. έχει λύση το $x = e^3$
δ. έχει λύση το $x = e^9$

3. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ τότε έχει παράγοντα και το:

- α. $x + 1$ β. $-x - 1$ γ. $1 - x$ δ. κανένα από τα προηγούμενα

4. Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ είναι συμμετρικές ως προς :

- α. τον άξονα $y'y$ β. την ευθεία $y = x$ γ. τον άξονα $x'x$ δ. την ευθεία $y = 2x$

5. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^3 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν το λ ισούται με:

- α. 1 β. -1 γ. -2 δ. κανένα από τα προηγούμενα

(Μον.10)

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (2\alpha + 5\beta)x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το $x = -1$ και το $P(2) = -9$.

Για $\alpha = -7$ και $\beta = 2$

B2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

B3. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

B4. Αν $v(x) = -2x - 2$ το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{v(x)}{P(x)} \geq 0 .$$

(Μον. 7, 7, 4, 7)

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x - 3)$ και $g(x) = \ln(e^x + 1)$.

G1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων.

G2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $g(x)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αν υπάρχουν.

G3. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

G4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μον. 6, 5, 7, 7)

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4^x - 2)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση $4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}2^{x+1} + \frac{6}{5} > 0$

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x = \frac{f(1)}{e^{\ln^2} \cdot \ln 2}$ στο $[0, 2\pi]$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $f(2x) - f(x) > f(1)$

(Μον. 4, 7, 7, 7)