ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

1/2/2025

Θέμα Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Α2. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ.

Α4 . Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ ,τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα

γ) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) ,τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

δ) Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$,τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

ε) Αν f, g, g' συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$,τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 1)$, $x \in R$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$

Β3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x}{x}, & x < 0 \\ f(x) - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [-π,0].

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(-π , 0) τέτοιο ώστε :

$$\eta\mu\xi = 2\xi \cdot \sigma\upsilon\nu\xi$$

Μονάδες : 8 – 7 – 10(6-4)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x - x + 1, & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Γ1. α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. Αν $g(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$ και $h(x) = x - 1$, $x \in R$,τότε δείξτε ότι Cg και Ch έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο και εφάπτονται μεταξύ τους σε αυτό.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^x = e^{x+1}$, $x > 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈(1 , x_0) τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) \cdot (x_0 - 1) = 2$$

Μονάδες : 9(3-6) **– 4 – 6 – 6**

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \ln(x + 1)$, $x > -1$.

Δ1. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2025$ έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1, x_2 με $-1 < x_1 < 0 < x_2$.

Δ2. Αν $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x > -1$.

α) Να αποδείξετε ότι η g(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

β) Να λυθεί η ανίσωση :

$$f(4x^2 + 1) + f(x^4) \leq f(x^4 + 1) + f(4x^2)$$

Δ3. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{\xi}$$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} - 2) = 2025$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(3, +\infty)$.

Μονάδες : 9(4-5) **– 6**(3-3)**– 4 – 6**